

Manche Kinder entdecken früh, dass sie besondere Freude und Leichtigkeit im Umgang mit Mathematik haben. Wissenschaftliche Untersuchungen zeigen, dass mathematisch begabte Kinder nicht nur schneller rechnen oder Aufgaben lösen, sondern oft auch ungewöhnliche Fragen stellen, eigene Lösungswege finden und Spass daran haben, Muster oder Zusammenhänge zu entdecken. Damit diese Stärken wachsen können, ist es wichtig, sie gezielt zu fördern: durch herausfordernde Aufgaben, die über das Schulbuch hinausgehen, durch offene Fragen, die zum Nachdenken anregen, und durch Gelegenheiten, Mathematik in neuen Zusammenhängen zu erleben.

Im folgenden Text werden wissenschaftliche Erkenntnisse zu mathematischer Begabung aufgegriffen. Anschliessend findest du praktische Fragestellungen, die Kindern helfen können, ihre Fähigkeiten auszuprobieren und weiterzuentwickeln.

Dr. Patrick Meier



Wissenschaftlich fundierte Ansätze zur Berücksichtigung von Heterogenität setzen auf **Differenzierung, Offenheit, Mehrfachzugänge und Kooperation**. Sie fördern mathematische Denkprozesse auf individuellem Niveau, ohne Kinder zu isolieren, und stärken dabei Motivation und Selbstwirksamkeit.

Heterogenität im Mathematikunterricht manifestiert sich in der Unterschiedlichkeit der Lernenden hinsichtlich kognitiver Voraussetzungen, sprachlicher Ressourcen, Interessen und motivationaler Orientierungen. Empirische Studien belegen, dass Lernprozesse insbesondere dann erfolgreich verlaufen, wenn diese Vielfalt systematisch berücksichtigt wird (vgl. Vygotsky, 1978; Prediger, 2013). Aus didaktischer Perspektive ist hierfür eine adaptive Gestaltung von Lernumgebungen zentral: Aufgaben sollten so angelegt sein, dass sie unterschiedliche Bearbeitungstiefen ermöglichen

und damit sowohl grundlegende als auch erweiterte mathematische Denkprozesse anregen.

Besondere Bedeutung kommt dabei offenen Aufgabenformaten zu, die mehrere Lösungswege zulassen und damit individuelle Zugänge fördern. Darüber hinaus erweist sich die Bereitstellung von Mehrfachzugängen – handelnd, visuell, symbolisch und sprachlich – als bedeutsam, um heterogene Lernvoraussetzungen zu adressieren. Ergänzend lassen sich durch differenzierte Unterstützungsmassnahmen (Scaffolding) und Vertiefungsangebote Lernprozesse auf unterschiedlichen Niveaustufen anleiten. Ebenso wird in der Forschung hervorgehoben, dass kooperative Lernformen nicht nur soziale Kompetenzen, sondern auch die mathematische Argumentationsfähigkeit befördern (vgl. Cobb et al., 1997). Schliesslich eröffnen digitale Lernumgebungen Potenziale, um adaptiv auf individuelle Lernstände zu reagieren und visuelle wie dynamische Repräsentationen verfügbar zu machen.

Insgesamt zeigt sich, dass Heterogenität nicht als defizitäre Ausgangslage, sondern als Ressource für gemeinsames Lernen und vertieftes mathematisches Denken verstanden werden sollte.

Konkrete Beispiele

Zyklus 1

Offene Aufgaben eignen sich besonders, um Kinder im Mathematikunterricht auf unterschiedlichen Niveaus zu fördern. So kann beispielsweise die Frage „Auf wie viele verschiedene Arten kannst du die Zahl 24 zerlegen?“ auf vielfältige Weise bearbeitet werden: Manche Kinder beginnen mit einfachen Zerlegungen wie $20 + 4$, während andere systematisch alle Möglichkeiten aufstellen oder sogar Muster entdecken und auf andere Zahlen übertragen. Ebenso lassen sich Musteraufgaben nutzen, etwa die Beobachtung, was passiert, wenn man die ungeraden Zahlen nacheinander addiert. Während die einen zunächst nur Ergebnisse sammeln, erkennen andere, dass Quadratzahlen entstehen, und können versuchen, dieses Muster zu erklären – etwa mithilfe geometrischer Darstellungen.

Konkretisierung 1:

- *Einfacher Einstieg: $24 = 20 + 4$ oder $12 + 12$*
- *Vertiefung: systematisches Aufstellen aller Möglichkeiten, auch mit mehr als zwei Summanden*
- *Erweiterung: Suche Muster in den Zerlegungen, verallgemeinere auf andere Zahlen.*

Konkretisierung 2:

- *Einstieg: 1, 1+3, 1+3+5, ...*
- *Beobachtung: Ergebnisse sind Quadratzahlen*
- *Vertiefung: Erklärung, warum dieses Muster entsteht (z. B. durch geometrische Darstellungen mit Quadraten).*

Auch Sachkontexte eröffnen Zugänge: Bei der Frage, welche Einkaufsmöglichkeiten sich mit 10 Franken im Schulkiosk ergeben, reicht die Spannweite vom einfachen Addieren bis hin zur systematischen Erfassung aller Kombinationen und der Entwicklung allgemeiner Strategien.

Konkretisierung 3:

- *Einstieg: einfache Additionen (z. B. $2+3+5$)*
- *Vertiefung: systematische Darstellung aller Kombinationen*

Im Bereich der Geometrie lässt sich mit der Aufgabe „Wie viele verschiedene Rechtecke kannst du aus 24 Plättchen legen?“ sowohl handelnd als auch abstrakt arbeiten: vom Legen einzelner Formen bis zum Entdecken des Zusammenhangs zwischen Rechtecken und den Teilern einer Zahl.

Konkretisierung 4:

- *Einstieg: 1×24 , 2×12 , 3×8 , 4×6*
- *Vertiefung: Zusammenhang mit den Teilern von 24 entdecken*
- *Erweiterung: Verallgemeinerung für beliebige Zahlen (Primzahlen $\rightarrow$ nur zwei Rechtecke).*

Erweiterung: Formuliere Regeln, wie man sicherstellen kann, dass man keine Möglichkeit übersieht. Logisches Denken wird angeregt, wenn Kinder Zahlenrätsel lösen, zum Beispiel: „Ich denke an eine Zahl. Wenn man sie mit 3 multipliziert und dann 4 addiert, kommt 19 heraus. Welche Zahl ist es?“ Während einige Kinder durch Probieren zur Lösung finden, entwickeln andere Strategien wie das Rückwärtsrechnen oder Erfinden eigene Aufgaben.

Konkretisierung 5:

- *Einstieg: Probieren mit kleinen Zahlen*
- *Vertiefung: Strategie entwickeln (Rückwärtsrechnen)*
- *Erweiterung: Eigene Rätsel mit anderen Rechenoperationen formulieren.*

Schliesslich bieten auch entdeckende Fragestellungen besondere Chancen. So können Kinder untersuchen, was passiert, wenn man alle geraden Zahlen von 2 bis 20 addiert und die Ergebnisse mit der Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 19 vergleicht. Manche Kinder rechnen nur die Ergebnisse aus, andere entdecken Gleichheiten oder versuchen, allgemeine Formeln abzuleiten.

Konkretisierung 6:

- *Einstieg: Ergebnisse berechnen*
- *Vertiefung: Muster finden (Summe der Geraden = Summe der Ungeraden)*
- *Erweiterung: allgemeine Formel ableiten und begründen.*

Solche offenen Fragestellungen zeichnen sich dadurch aus, dass sie niedrige Einstiegshürden bieten, aber vielfältige Vertiefungen ermöglichen. Damit tragen sie wesentlich dazu bei, sowohl die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen als auch die besonderen Begabungen von Kindern im Mathematikunterricht produktiv zu berücksichtigen

Zyklus 2

Grundsätzliche Überlegungen zum Einsatz eines Forscherheftes

Das Forscherheft bietet Kindern im Zyklus 2 eine strukturierte Möglichkeit, ihre mathematischen Denkwege sichtbar zu machen und eigene Entdeckungen festzuhalten. Es dient nicht nur der Dokumentation von Ergebnissen, sondern vor allem dem Prozess des Forschens: Kinder notieren Vermutungen, zeichnen Skizzen, halten Rechenwege fest und formulieren Fragen, die sich im Laufe der Arbeit ergeben. Damit wird ein Raum geschaffen, in dem individuelle Strategien wertgeschätzt und verschiedene Lösungsansätze nachvollziehbar werden.

Der Einsatz eines Forscherheftes unterstützt mehrere zentrale Ziele des Mathematikunterrichts. Einerseits fördert er die Metakognition, indem Kinder über ihr eigenes Denken reflektieren und Lösungswege bewusst darstellen. Andererseits wird mathematische Kommunikation gestärkt: Kinder lernen, ihre Überlegungen so zu formulieren, dass andere sie verstehen und weiterdenken können. Gleichzeitig ermöglicht das Heft der Lehrperson, Einblicke in den Denkprozess der Lernenden zu gewinnen und gezielt auf individuelle Stärken oder Schwierigkeiten einzugehen.

Das Forscherheft eignet sich besonders in Verbindung mit offenen Aufgabenformaten und entdeckendem Lernen. Ob beim systematischen Zerlegen einer Zahl, beim Untersuchen geometrischer Muster oder beim Lösen von Sachaufgaben – Kinder können ihre Ideen im Heft ausprobieren, ordnen und weiterentwickeln. Damit wird das Forscherheft zu einem Instrument, das die Vielfalt im Klassenzimmer sichtbar macht und die Heterogenität der Lerngruppe produktiv aufgreift.

Konkrete Fragestellungen

- *Suche Zahlen, welche von einer bestimmten Zahl auf der Zahlengerade gleich weit weg sind. Diese Aufgabe kann in der 5./6. Klasse auch mit einer dezimalen Unterteilung bearbeitet werden.*
- *Erstelle diverse Brüche und ordne diese nach eigenen Kriterien.*
- *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich mit einem «normalen» Würfel eine bestimmte Zahl (bspw. «6») würfle.*
- *Erstelle ein Wandtafelbild einer «schwierigen» Rechnung, so dass alle in der Klasse die Aufgabe verstehen können.*
- *Eine Diagonale soll in allen Figuren 6 cm gross sein. Gestalte nun möglichst viele Figuren, diese Eigenschaft besitzen. Beginne dabei bei dir bekannten Figuren: Dreieck, Viereck, ... usw.)*
- *Wo findest du in der Natur Zahlen. Recherchiere, zeichne und erkläre.*
- *Wie rechneten die Ägypter, die Römer, die Inder, die Chinesen?*
- *Gibt es in deiner Umgebung Menschen aus anderen Kulturen? Versuche herauszufinden, wie diese rechnen.*
- *Ist die Reihe der natürlichen Zahlen endlich oder unendlich? Wie sieht dies mit Bruchzahlen aus. Versuche deine Einschätzung zu beweisen.*
- *Erstelle ein Muster als Parkett. Kannst du erklären, wie ein solches Muster ohne Abstände zwischen den Elementen entsteht.*
- *Warum empfinden wir Symmetrie als schön?*
- *Es gab eine mathematische Fragestellung, bei der auf einem Schachbrett im ersten Feld 1 Reiskorn, auf dem zweiten Feld 2 Reiskörner, auf dem dritten Feld 4 Reiskörner usw. platziert wurden. Was meinst du dazu?*
- *Ich mache beim Lotto mit. Habe ich eine Chance auf den Gewinn?*
- *Was bedeutet die Quadratur des Kreises aus deiner Sicht? Kannst du dies erklären?*
- *Welche Proportionen stecken hinter den bekannten Blattgrössen (wie A4, A5, A6 usw.)*
- *Forsche zu den platonischen Körpern.*
- *Kann man jede Gleichung lösen? Kannst du jede Gleichung lösen?*
- *Finanzmathematik: Ich investiere einen Franken zu Christi Geburt. Wie hoch ist der Wert heute?*

- Welche Zusammenhänge gibt es zwischen Mathematik und Musik?

Literaturhinweise

Prediger, S., Buró, S. (2021). Selbstberichtete Praktiken von Lehrkräften im inklusiven Mathematikunterricht – Eine Interviewstudie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 42(2), 187-217.

Leuders, J., Leuders, T., Prediger, S., & Ruwisch, S. (Hrsg.). (2017). *Mit Heterogenität im Mathematikunterricht umgehen lernen: Konzepte und Perspektiven für eine zentrale Anforderung an die Lehrerbildung*. Springer Spektrum.

Prediger, S., Özdil, E. (Hrsg.). (2011). *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit: Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland*. Waxmann Verlag.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences*, 10(1-2), 113-163.

Cobb, P. (2002). *The interaction of social and cognitive dimensions in classroom mathematical practice* [In Scaffolding norms of argumentation-based inquiry]. *ZDM – Mathematics Education*, 47, 1-11. (Ein Artikel, der sich mit Normen in Argumentationen befasst)

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.